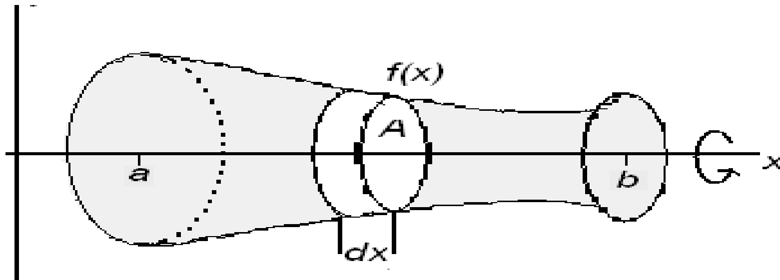
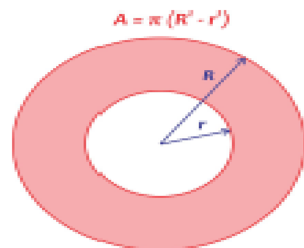
Volúmenes



Método de anillos o arandela

Recordemos que



$$\acute{A}rea_anillo = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi\left(R^2 - r^2\right).$$

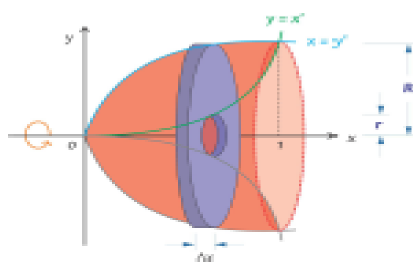
Ejemplo. Encuentre el volumen del sólido obtenido al girar la región limitada por las curvas, alrededor del eje indicado:

a) $y = x^2$, $y^2 = x$; alrededor del eje x.

b) $y = x^4$, $y = 1$, $x = 0$; alrededor de $y = 2$.

Solución.

a)



Cortamos una arandela de tal forma que

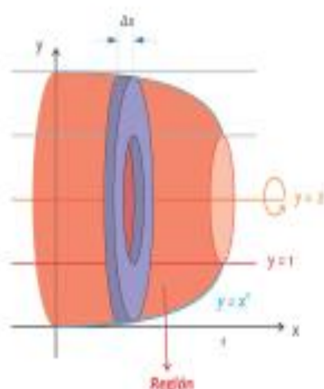
$R = \sqrt{x} - 0$, $\quad r = x^2 - 0$.

Interceptos: $x^2 = \sqrt{x} \implies x^4 - x = 0 \implies x = 0, x = 1$.

Luego,

$$V = \int_0^1 \pi\left[(\sqrt{x}) - (x^2)^2\right] dx = \pi \int_0^1 \left(x - x^4\right) dx = \cdots = \frac{3\pi}{10}\ und^3.$$

b)



Cortamos una arandela de tal forma que

$$R = 2 - x^4, \quad r = 2 - 1.$$

Si $y = 1 \implies x = 1$.

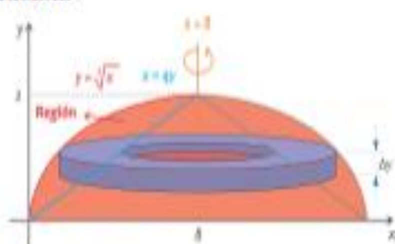
De donde

$$V = \int_0^1 \pi \left[\left(2 - x^4\right)^2 - (1)^2 \right] dx = \cdots = \frac{104\pi}{45} \ und^3.$$

Observar que la sección se toma perpendicular al eje de rotación.

Ejemplo. Halle el volumen de sólido obtenido al girar la región encerrada por las curvas $x = 4y$ y $y = \sqrt[3]{x}$ en el I cuadrante, alrededor de la recta $x = 8$.

Solución.



Interceptos

$$4y = y^3 \implies y\left(y^2 - 4\right) = 0 \implies (0,0) \ \text{ y } \ (8,2).$$

$$R = 8 - y^3 \ \text{ y } \ r = 8 - 4y.$$

$$A(y) = \pi \left[\left(8 - y^3\right)^2 - (8 - 4y)^2 \right].$$

En este caso nos queda

$$V = \int_0^2 \pi \left[\left(8 - y^3\right)^2 - (8 - 4y)^2 \right] dy = \cdots = 112{,}8\pi \ und^3.$$